6. Ибушева О. В., Мухарлямов Р. Г. *Построение неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном пространстве* // Учен. зап. Казан. ун-та. – 2008. – Т. 150. – Кн. 3. – С. 133–139.

7. Матухина О. В. *Управление движением колесной системы по заданной траектории с обходом препятствий* // Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та. – 2012. – Т. 15. – № 11. – С. 272–274.

8. Мухарлямов Р. Г., Матухина О. В. *Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация* // Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та. – 2012. – Т. 15. – № 12. – С. 220–224.

9. Ибушева О. В., Мухарлямов Р. Г. *О построении уравнений динамики механических систем с программными связями* // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. – 2010. – № 1. – С. 75–80.

А. Н. Миронов

Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета

miro73@mail.ru

ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Речь идет об уравнениях вида

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$D_1 \equiv \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}},$$

а D_2 – линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные от искомой функции $u(x_1,\ldots,x_n)$, получаемые из D_1u отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Данное уравнение можно записать в виде

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0\leqslant q_i\leqslant m_i,\\ i=\overline{1,n}}} a_{q_1q_2\ldots q_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)u_{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n}} =$$

$$= f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

где $a_{q_1q_2\ldots q_n}$, f – заданные функции, $a_{m_1m_2\ldots m_n}\equiv 1$. Очевидно, что старшая производная D_1u определяет здесь и порядок уравнения, и всю его структуру, вследствие чего её естественно называть доминирующей. К рассматриваемому классу принадлежит, например, уравнение Бианки [1], [2], [3] для которого

$$D_1 \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n}.$$

Хорошо известна роль инвариантов Лапласа в теории уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{1}$$

В частности, они играют определяющую роль в классификации уравнений вида (1) с точки зрения группового анализа. Напомним основной классификационный результат [4], [5, с. 116–125] [6, с. 123–124], [7, с. 164] для этих уравнений. Два таких уравнения эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$ имеют для обоих уравнений одинаковые значения. Алгебра Ли уравнения (1) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами

$$X = \xi^1(x,y)\partial_x + \xi^2(x,y)\partial_y + \sigma(x,y)u\partial_u, \tag{2}$$

а L^∞ — подалгебра с оператором $\mu(x,y)\partial_u$, μ — решение (1). Оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (1), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y)$ определяется в (1) с точностью до постоянного слагаемого.

Если $h = k \equiv 0$, то уравнение (1) эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов $X = \xi^1(x)\partial_x + \xi^2(y)\partial_y$ с произвольными функциями $\xi^1(x)$, $\xi^2(y)$. Если $h \neq 0$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [4], [5, с. 123]. *Уравнение* (1) *допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов* (2) *тогда и только тогда, когда функции*

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{(\ln h)_{xy}}{h}$$

тождественно постоянны. Если p и q постоянны, то уравнение (1) *равносильно либо уравнению Эйлера-Пуассона* ($q \neq 0$)

$$u_{xy} - \frac{2/q}{x+y}u_x - \frac{2p/q}{x+y}u_y + \frac{4p/q^2}{(x+y)^2}u = 0,$$

либо уравнению ($q = 0$)

$$u_{xy} + xu_x + pyu_y + pxyu = 0,$$

причем его алгебра Ли операторов (2) *трехмерна.*

1. Уравнение Бианки третьего порядка. Рассмотрим однородное уравнение Бианки третьего порядка

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \qquad (3)$$

Совокупность преобразований эквивалентности для (3)

$$\overline{x} = \alpha(x), \quad \overline{y} = \beta(y), \quad \overline{z} = \gamma(z), \quad u = \omega(x,y,z)\overline{u}. \qquad (4)$$

Два уравнения вида (3) называются эквивалентными по функции [5, с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (4), в которых

$$\alpha(x) = x, \quad \beta(y) = y, \quad \gamma(z) = z.$$

В [8] было показано, что два уравнения вида (3) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда их инварианты Лапласа

$$\begin{gathered}
H_1 = a_y + ac - d,\ H_2 = a_x + ab - e,\\
H_3 = c_x + bc - f,\ H_4 = b_z + ab - e,\\
H_5 = b_y + bc - f,\ H_6 = c_z + ac - d,\\
H_7 = a_{xy} + bd + ce + af - 2abc - g,\\
H_8 = b_{yz} + bd + ce + af - 2abc - g,\\
H_9 = c_{xz} + bd + ce + af - 2abc - g
\end{gathered}$$

совпадают.

Из результатов работы [8] непосредственно следует

Теорема 2. *Два уравнения вида* (3) *с наборами инвариантов Лапласа* H_1, H_2, …, H_9 *и* $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$, …, $\overline{H}_9$ *соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{gathered}
H_1 = \beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_1, \quad H_2 = \alpha'(x)\gamma'(z)\overline{H}_2,\\
H_3 = \alpha'(x)\beta'(y)\overline{H}_3, \quad H_4 = \alpha'(x)\gamma'(z)\overline{H}_4,\\
H_5 = \alpha'(x)\beta'(y)\overline{H}_5, \quad H_6 = \beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_6,\\
H_i = \alpha'(x)\beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_i, \quad i = 7,\ 8,\ 9.
\end{gathered}$$

Если искать допускаемый уравнением (3) оператор

$$\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z + \tau\partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений составят

$$\partial_u\alpha = \partial_u\beta = \partial_u\gamma = 0, \quad \partial_u^2\tau = 0.$$

Известно [5, с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (3) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x,y,z)\partial_x + \xi^2(x,y,z)\partial_y + \xi^3(x,y,z)\partial_z + \sigma(x,y,z)u\partial_u, \quad (5)$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\mu(x,y,z)\partial_u$, где μ — решение уравнения (3). Ясно, что оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (3), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y,z)$ определяется в (4) с точностью до постоянного слагаемого.

Введем в рассмотрение отношения

$$p_{12} = \frac{H_3}{H_5}, \quad p_{13} = \frac{H_2}{H_4}, \quad p_{23} = \frac{H_1}{H_6},$$

а также конструкции

$$\begin{gathered} q_1 = \frac{(\ln H_1)_{yz}}{H_1}, \quad q_2 = \frac{(\ln H_2)_{xz}}{H_2}, \quad q_3 = \frac{(\ln H_3)_{xy}}{H_3}, \\ q_4 = \frac{(\ln H_4)_{xz}}{H_4}, \quad q_5 = \frac{(\ln H_5)_{xy}}{H_5}, \quad q_6 = \frac{(\ln H_6)_{yz}}{H_6}, \\ q_i = \frac{(\ln H_i)_{xyz}}{H_i}, \quad i = 7,\ 8,\ 9. \end{gathered}$$

Применение трижды продолженного оператора X к уравнению (3) и расщепление относительно свободных параметров приводит к определяющим уравнениям, которые могут быть записаны с использованием инвариантов Лапласа в виде

$$\xi^1_y = \xi^1_z = \xi^2_x = \xi^2_z = \xi^3_x = \xi^3_y = 0,$$

$$(\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_x = (H_3 - H_5)\xi^2 + (H_2 - H_4)\xi^3,$$

$$(\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_y = (H_5 - H_3)\xi^1 + (H_1 - H_6)\xi^3,$$

$$(\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_z = (H_4 - H_2)\xi^1 + (H_6 - H_1)\xi^2,$$

$$H_{1x}\xi^1 + (H_1\xi^2)_y + (H_1\xi^3)_z = 0,$$

$$
\begin{gathered}
H_{6x}\xi^1 + (H_6\xi^2)_y + (H_6\xi^3)_z = 0, \\
(H_2\xi^1)_x + H_{2y}\xi^2 + (H_2\xi^3)_z = 0, \\
(H_4\xi^1)_x + H_{4y}\xi^2 + (H_4\xi^3)_z = 0, \\
(H_3\xi^1)_x + (H_3\xi^2)_y + H_{3z}\xi^3 = 0, \\
(H_5\xi^1)_x + (H_5\xi^2)_y + H_{5z}\xi^3 = 0, \\
(H_7\xi^1)_x + (H_7\xi^2)_y + (H_7\xi^3)_z = 0, \\
(H_8\xi^1)_x + (H_8\xi^2)_y + (H_8\xi^3)_z = 0, \\
(H_9\xi^1)_x + (H_9\xi^2)_y + (H_9\xi^3)_z = 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Первая строка в (6) показывает, что $\xi^1 = \xi^1(x)$, $\xi^2 = \xi^2(y)$, $\xi^3 = \xi^3(z)$. Вторая, третья и четвертая строки из (6) представляют собой дифференциальные уравнения для определения функции σ, после того как найдены ξ^1, ξ^2, ξ^3. Ответственными за результаты групповой классификации оказываются уравнения, записанные начиная с пятой строки.

В работе [9] построено восемь классов уравнений вида (3) с указанными выше постоянными инвариантами преобразования (4), которые допускают алгебры Ли L^r, где r принимает значения 1, 3, 4 и ∞.

Отметим, что в случае постоянных q_i, $i = \overline{1,6}$, инвариант H_i является решением уравнения Лиувилля

$$
(\ln w)_{xy} = q_i w,
$$

формула общего решения которого известна [5, с. 123]. Аналогично, если какая-либо из конструкций q_i, $i = \overline{7,9}$, постоянна, то соответствующий инвариант H_i является решением уравнения

$$
(\ln H_i)_{xyz} = q_i H_i.
$$

Очевидно, что это уравнение имеет точное решение

$$H_i = -\frac{6\lambda'(x)\mu'(y)\nu'(z)}{q_i(\lambda(x)+\mu(y)+\nu(z))^3}.$$

Возникает вопрос: какое уравнение вида (3) может рассматриваться в качестве трехмерного аналога уравнения Эйлера-Пуассона (то есть имеет близкие групповые свойства)?

Уравнение Эйлера-Пуассона согласно теореме 1 характеризуется условиями: p и q постоянны, $q \neq 0$. В качестве критерия отбора следует принять, что трехмерный аналог

1) должен допускать алгебру L^r наибольшей конечной размерности,

2) имеет конструкции q_i, $i = 7,\ 8,\ 9$, отличные от нуля,

3) коэффициенты уравнения должны иметь достаточно простую структуру, сходную со структурой коэффициентов уравнения Эйлера-Пуассона.

Уравнение, являющееся, в соответствии с требованиями 1)–3), трехмерным аналогом уравнения Эйлера-Пуассона, имеет вид

$$u_{xyz} - \frac{2p_{23}}{q_6(y+z)}u_{xy} - \frac{2}{q_6(y+z)}u_{xz} + \\ + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2}u_x + \frac{6}{q_7(x+y+z)^3}u = 0$$

и допускает алгебру L^2, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z.$$

2. Уравнение Бианки четвертого порядка. Рассмотрим уравнение

$$u_{x_1x_2x_3x_4} + a_1u_{x_2x_3x_4} + a_2u_{x_1x_3x_4} + a_3u_{x_1x_2x_4} + a_4u_{x_1x_2x_3} + \\ + a_{12}u_{x_3x_4} + a_{13}u_{x_2x_4} + a_{14}u_{x_2x_3} + a_{23}u_{x_1x_4} + a_{24}u_{x_1x_3} + a_{34}u_{x_1x_2} + \\ + a_{123}u_{x_4} + a_{124}u_{x_3} + a_{134}u_{x_2} + a_{234}u_{x_1} + a_{1234}u = 0 \quad (7)$$

с переменными коэффициентами.

Для уравнения (7) в [10] построены 28 инвариантов Лапласа:

$$\begin{gathered}
h_{i,j} = a_{ix_j} + a_i a_j - a_{ij}, \\
h_{i,jk} = a_{ix_j x_k} + a_i a_{jk} + a_j a_{ik} + a_k a_{ij} - 2a_i a_j a_k - a_{ijk}, \\
h_{i,jkl} = a_{ix_j x_k x_l} + a_i a_{jkl} + a_j a_{ikl} + a_k a_{ijl} + a_l a_{ijk} + \\
+ a_{ij} a_{kl} + a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{jk} - 2a_i a_j a_{kl} - 2a_i a_k a_{jl} - \\
-2a_i a_l a_{jk} - 2a_j a_k a_{il} - 2a_j a_l a_{ik} - 2a_k a_l a_{ij} + \\
+6a_i a_j a_k a_l - a_{ijkl}, \quad \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}, \quad j < k < l.
\end{gathered}$$

Здесь коэффициенты, различающиеся порядком следования индексов, считаем равными (например, $a_{123} = a_{231}$). Два уравнения вида (7) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда у них равны все соответствующие инварианты Лапласа. В той же работе записаны определяющие уравнения для (7) в инвариантной форме.

Нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Два уравнения вида* (7) *с наборами инвариантов Лапласа* $h_{1,2}$, $h_{2,1}$, …, $h_{1,23}$, …, $h_{1,234}$, …, $h_{4,123}$ *и* $\overline{h}_{1,2}$, $\overline{h}_{2,1}$, …, $\overline{h}_{1,23}$, …, $\overline{h}_{1,234}$, …, $\overline{h}_{4,123}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{gathered}
h_{i,j} = \alpha_i'(x_i)\alpha_j'(x_j)\overline{h}_{i,j}, \quad h_{i,jk} = \alpha_i'(x_i)\alpha_j'(x_j)\alpha_k'(x_k)\overline{h}_{i,jk}, \\
h_{i,jkl} = \alpha_i'(x_i)\alpha_j'(x_j)\alpha_k'(x_k)\alpha_l'(x_l)\overline{h}_{i,jkl}, \\
i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}, \quad i \neq j \neq k \neq l.
\end{gathered}$$

Введем в рассмотрение отношения инвариантов Лапласа

$$p_{ij} = \frac{h_{j,i}}{h_{i,j}}, \quad i,\, j = \overline{1,4},$$

а также конструкции

$$q_{ij} = \frac{(\ln h_{i,j})_{x_i x_j}}{h_{i,j}}, \quad i,\, j = \overline{1,4}.$$

С помощью указанных функций построены классы уравнений вида (7), аналогичные указанным в пункте 1. Относительно полученных классов можно сделать следующие выводы. Алгебра Ли уравнения (7) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида

$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi^i(x_1, x_2, x_3, x_4)\partial_{x_i} + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)u\partial_u,$$

а L^∞ — подалгебра, образованная оператором $u\partial_u$ и операторами вида $\mu\partial_u$, где μ — решение уравнения (7). Если все функции p_{ij} ($h_{i,j} \neq 0$) постоянны, либо $h_{i,j} = h_{j,i} \equiv 0$, причем хотя бы один из инвариантов $h_{k,l} \neq 0$, то алгебра L^r может быть бесконечномерной. Если размерность алгебры L^r конечна, то для рассмотренных классов уравнения (7) ее максимальное значение $r = 6$.

3. Уравнения с двумя независимыми переменными. Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} + a_{20}(x,y)u_{xx} + a_{11}(x,y)u_{xy} + a_{10}(x,y)u_x + \\ + a_{01}(x,y)u_y + a_{00}(x,y)u = 0. \quad (8)$$

Инварианты Лапласа для уравнения (8) имеют вид

$$h_1 = 2a_{20x} + a_{20}a_{11} - a_{10},\; h_2 = a_{11y} + a_{20}a_{11} - a_{10},$$
$$h_3 = a_{11x} + \tfrac{a_{11}^2}{2} - 2a_{01},$$
$$h_4 = 2a_{20xx} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00},$$
$$h_5 = a_{11xy} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}.$$

Определяющие уравнения для (8) могут быть представлены в инвариантной форме

$$
\begin{gathered}
\xi_y = 0, \quad \eta_x = 0, \\
(2\sigma + 2a_{20}\eta + a_{11}\xi)_y = (h_2 - h_1)\xi, \\
(2\sigma + 2a_{20}\eta + a_{11}\xi)_x = (h_1 - h_2)\eta + \xi_{xx}, \\
(h_1\xi)_x + (h_1\eta)_y = 0, \quad (h_2\xi)_x + (h_2\eta)_y = 0, \\
\xi_{xxx} - (h_3\xi)_x - h_3\xi_x - h_{3y}\eta = 0, \\
\xi_{xx}h_1 + (h_4\xi)_x + h_4\xi_x + (h_4\eta)_y = 0, \\
\xi_{xx}h_2 + (h_5\xi)_x + h_5\xi_x + (h_5\eta)_y = 0.
\end{gathered}
$$

Далее ограничимся рассмотрением уравнений (8), для которых выполняется хотя бы одно из условий $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$.

Введем обозначения

$$
p_{12} = \frac{h_1}{h_2}, \quad p_{21} = \frac{h_2}{h_1}, \quad q_i = \frac{(\ln h_i)_{xy}}{h_i}, \quad i = 1,\, 2.
$$

Справедливо утверждение: если хотя бы одна из функций p_{12}, p_{21}, q_1, q_2 не равна тождественно постоянной, то алгебра Ли L^r операторов вида (2) не более чем одномерна.

Отметим, что если q_i постоянны, то инварианты h_i удовлетворяют уравнению Лиувилля.

Сконструированы уравнения, которые являются представителями классов уравнений вида (8), допускающими алгебру Ли L^r наибольшей размерности. Поскольку q_i в этом случае постоянны, структура коэффициентов этих уравнений определяется из уравнения Лиувилля однозначно.

Теорема 4. *Пусть выполняется условие* $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$. *Тогда уравнение* (8) *допускают более чем одномерную алгебру Ли операторов* (2) *тогда и только тогда, когда функции* p_{ij}, q_i ($i,\ j = 1,\ 2$) *тождественно постоянны. Если* p_{ij} *и* q_i *постоянны, то наибольшая размерность допускаемой алгебры*

Ли L^r *операторов* (2) *равна трем как в случае* $q_1^2+q_2^2\equiv 0$, *так и в случае* $q_1^2+q_2^2\neq 0$.

Рассмотрим уравнения четвертого порядка. Для уравнения

$$\begin{gathered}u_{xxyy}+a_{21}(x,y)u_{xxy}+a_{12}(x,y)u_{xyy}+\\ +a_{20}(x,y)u_{xx}+a_{11}(x,y)u_{xy}+a_{02}(x,y)u_{yy}+\\ +a_{10}(x,y)u_x+a_{01}(x,y)u_y+a_{00}(x,y)u=0\end{gathered}$$

инварианты Лапласа имеют вид

$$\begin{gathered}h_1=2a_{21x}+a_{21}a_{12}-a_{11},\ h_2=2a_{12y}+a_{21}a_{12}-a_{11},\\ h_3=2a_{12x}+a_{12}^2-4a_{02},\ h_4=2a_{21y}+a_{21}^2-4a_{20},\\ h_5=2a_{21xy}+a_{21}a_{11}+2a_{12}a_{20}-a_{21}^2a_{12}-2a_{10},\\ h_6=2a_{12yy}+a_{21}a_{11}+2a_{12}a_{20}-a_{21}^2a_{12}-2a_{10},\\ h_7=2a_{21xx}+a_{12}a_{11}+2a_{21}a_{02}-a_{12}^2a_{21}-2a_{01},\\ h_8=2a_{12xy}+a_{12}a_{11}+2a_{21}a_{02}-a_{12}^2a_{21}-2a_{01},\\ h_9=a_{21xxy}+a_{21}a_{01}+a_{12}a_{10}+2a_{20}a_{02}-a_{21}a_{12}a_{11}-\\ -a_{21}^2a_{02}-a_{12}^2a_{20}+\tfrac{3}{4}a_{21}^2a_{12}^2+\tfrac{1}{4}a_{11}^2-2a_{00},\\ h_{10}=a_{12xyy}+a_{21}a_{01}+a_{12}a_{10}+2a_{20}a_{02}-a_{21}a_{12}a_{11}-\\ -a_{21}^2a_{02}-a_{12}^2a_{20}+\tfrac{3}{4}a_{21}^2a_{12}^2+\tfrac{1}{4}a_{11}^2-2a_{00},\end{gathered}$$

а для уравнения

$$\begin{gathered}u_{xxxy}+a_{30}(x,y)u_{xxx}+a_{21}(x,y)u_{xxy}+a_{20}(x,y)u_{xx}+\\ +a_{11}(x,y)u_{xy}+a_{10}(x,y)u_x+a_{01}(x,y)u_y+a_{00}(x,y)u=0\end{gathered}$$

указанные инварианты могут быть записаны в следующей форме

$$h_1 = a_{21y} + a_{30}a_{21} - a_{20},\ h_2 = 3a_{30x} + a_{30}a_{21} - a_{20},$$
$$h_3 = a_{21x} + \tfrac{1}{3}a_{21}^2 - a_{11},$$
$$h_4 = 3a_{30xx} + a_{30}a_{11} + \tfrac{2}{3}a_{21}a_{20} - \tfrac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 - a_{10},$$
$$h_5 = a_{21xy} + a_{30}a_{11} + \tfrac{2}{3}a_{21}a_{20} - \tfrac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 - a_{10},$$
$$h_6 = a_{21xx} + a_{21}a_{11} - \tfrac{2}{9}a_{21}^3 - 3a_{01},$$
$$h_7 = 3a_{30xxx} + 3a_{30}a_{01} + a_{21}a_{10} + a_{20}a_{11} -$$
$$-2a_{30}a_{21}a_{11} - \tfrac{2}{3}a_{21}^2a_{20} + \tfrac{2}{3}a_{21}^3a_{30} - 3a_{00},$$
$$h_8 = a_{21xxy} + 3a_{30}a_{01} + a_{21}a_{10} + a_{20}a_{11} -$$
$$-2a_{30}a_{21}a_{11} - \tfrac{2}{3}a_{21}^2a_{20} + \tfrac{2}{3}a_{21}^3a_{30} - 3a_{00}.$$

Для этих уравнений доказаны теоремы, аналогичные теореме 4.

Результаты, относящиеся к уравнениям с кратным дифференцированием, получены совместно с Л.Б. Мироновой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаге М. К. *Задача Коши для уравнения Бианки* // Матем. сб. – 1958. – Т. 45. – № 3. – С. 281–322.

2. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* – Новосибирск: Наука, 1987. – 290 с.

3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

4. Овсянников Л. В. *Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина* // Журн. прикл. мех. и техн. физики. – 1960.– № 3. – С. 126–145.

5. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

6. Ибрагимов Н. Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике* // Успехи матем. наук. – 1992. – Т. 47. – Вып. 4. – С. 83–144.

7. Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. *Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа.* – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 392 с.

8. Джохадзе О. М. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 58–68.

9. Миронов А. Н. *Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 389–400.

10. Миронов А. Н. *Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 8. – С. 1144–1149.

Е. В. Мокшин, Е. В. Биряльцев, Д. В. Бережной

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

zhen-moks@yandex.ru, igenbir@yandex.ru,

berezhnoi.dmitri@mail.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Одной из наиболее актуальных задач в сейсмологии является определение пространственного положения и момента возникновения событий в геологической среде. Необходимо уметь определять местоположение источника, находящегося в Земле